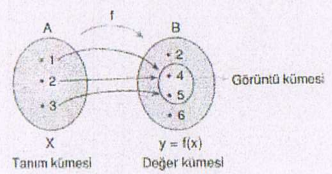
FONKSİYON TANIMI

- A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, A nın her elemanını B nin yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya A dan B ye fonksiyon denir.
- A dan B ye fonksiyon, $f: A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$, $x \to y = f(x)$ biçimlerinde gösterilir.
- $y = f(x)$ ifadesinde x bağımsız değişken, y bağımlı değişkendir.
- $y = f(x)$ ifadesi "x in f altındaki görüntüsü y dir." biçiminde okunur.
- Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için:

1) Tanım kümesinde boşta eleman kalmamalıdır.

2) Tanım kümesinin her elemanı değer kümesinin yalnız bir elemanıyla eşleşmelidir.

Örneğin:



Yukarıda $f: A \to B$ şeklindeki fonksiyonun,

Tanım kümesi : A = {1, 2, 3}

Değer kümesi : B = {2, 4, 5, 6}

$f(1) = 4 \to 1$ in görüntüsü 4,

$f(2) = 4 \to 2$ nin görüntüsü 4,

$f(3) = 5 \to 3$ ün görüntüsü 5 tir.

Bu durumda görüntü kümesi = {4, 5} olur.

FONKSİYON

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

Örnek 1

$f(x) = 5x + 7$ olduğuna göre,

f(2) kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 17 D) 20 E) 23

Çözüm

$f(x) = 5x + 7$

$f(2) = 5 . 2 + 7 = 10 + 7 + 17$ bulunur.

Cevap : C

Örnek 2

$f(2^x + 1) = 3x - 1$

olduğuna göre, f(17) kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm

$2^x + 1 = 17$

$2^x = 16$

$x = 4$

$f(2^x + 1) = 3x - 1$ ifadesinde x yerlerine 4 yazılırsa

$f(2^4 + 1) = 3 . 4 - 1$

$f(17) = 11$

Cevap : B

Örnek 3

$f(x^2 + 5x) = 3x^2 + 15x + 10$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm

$x^2 + 5x$ gördüğümüz yerlere 2 yazalım.

$f(x^2 + 5x) = 3x^2 + 15x + 10$

$f(\underbrace{x^2 + 5x}_{2}) = 3(\underbrace{x^2 + 5x}_{2}) + 10$

$f(2) = 3 . 2 + 10 = 16$

Cevap : D

Örnek 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 , & x \text{ çift ise} \\ x + 3 , & x \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, f(5) – f(4) kaçtır?

A) –5 B) –1 C) 3 D) 8 E) 15

Çözüm

f(5) bulunurken x yerine 5 (tek sayı) yazılacağından,

$f(x) = x + 3$ kullanılır. $f(5) = 5 + 3 = 8$ bulunur.

f(4) bulunurken x yerine 4 (çift sayı) yazılacağından,

$f(x) = 2x + 5$ kullanılır.

$f(4) = 2 . 4 + 5 = 8 + 5 = 13$ bulunur.

$f(5) - f(4) = 8 - 13 = -5$ bulunur.

Cevap : A

Örnek 5

$f(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = f(x - 1) + x + 2$

$f(3) = 10$ ise

f(20) nin değeri kaçtır?

A) 140 B) 165 C) 196 D) 224 E) 248

Çözüm

$f(x) = f(x - 1) + x + 2$

x = 4 için $f(4) = f(3) + 6$

x = 5 için $f(5) = f(4) + 7$

x = 6 için $f(6) = f(5) + 8$

⋮

x = 20 için $f(20) = f(19) + 22$

$\cancel{f(4) + f(5) + ... + f(19)} + f(20) = f(3) + \cancel{f(4) + ... + f(19)} + 6 + 7 + ... + 22$

$f(20) = f(3) + \underbrace{6 + 7 + 8 + . . . + 22}$

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğundan

$f(20) = 10 + \left(\frac{22 . 23}{2} - \frac{5 . 6}{2}\right)$

$f(20) = 248$ bulunur.

Cevap :

Örnek 6

f: {(2, 3), (3, 4), (4, 7)}

g: {(2, 5), (3, 1), (4, 0)}

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

(f + g)(3) + (2f – g)(2)

kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 1

Çözüm

$(f + g)(3) + (2f - g)(2)$

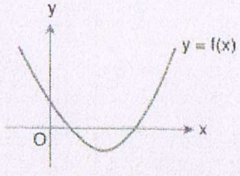
$f(3) + g(3) + 2f(2) - g(-2)$

$4 + 1 + 2 \cdot 3 - 5 = 6$

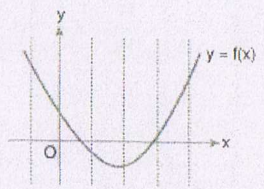
Cevap

Örnek 11

Yanda $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye grafiği verilen bağıntı fonksiyon mudur?



Çözüm



y eksenine paralel olarak çizilen doğrular grafiği sadece bir noktada kestiklerinden verilen bağıntı fonksiyondur.

Örnek 17

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$,

$f : A \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x$

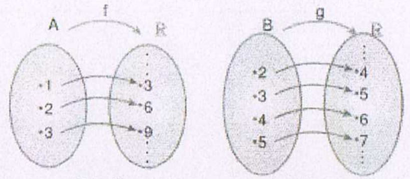
$g : B \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 2$

olduğuna göre, f . g fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {24, 45} B) {12, 18} C) {12, 26, 65}

D) {18, 24} E) {6, 8, 9}

Çözüm



$f(x) = 3x$
$f(1) = 3$
$f(2) = 6$
$f(3) = 9$

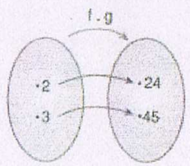
$g(x) = x + 2$
$g(2) = 4$
$g(3) = 5$
$g(4) = 6$
$g(5) = 7$

f . g fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

$f(1) . g(1)$ bulunamaz, çünkü $f(1) = 3$ olup, $g(1)$ verilmemiş. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının tanım kümesinde bulunan ortak elemanları seçelim.

$f(2) . g(2) = 6 . 4 = 24$

$f(3) . g(3) = 9 . 5 = 45$



f . g nin görüntü kümesi { 24, 45} bulunur.

Cevap : A

Örnek 18

3 farklı mektup zarfı 6 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

Çözüm

Permütasyon konusunda bu tip sorularla sıkça karşılaşırız.

1. zarfı 6 farklı kutudan birine atabiliriz.

2. zarfı 6 farklı kutudan birine atabiliriz.

3. zarfı 6 farklı kutudan birine atabiliriz.

O halde 6 . 6 . 6 = 216 bulunur.

2) Örten Fonksiyon :

$f : A \to B$ fonksiyonunda

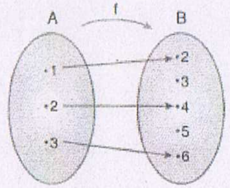
$f(A) = B$ ise yani görüntü kümesi ile değer kümesi eşit oluyorsa, bir başka ifadeyle değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa, f fonksiyonu örtendir.

Örnek 27

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$f : A \to B$, $f(x) = 2x$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu örten midir?

Çözüm



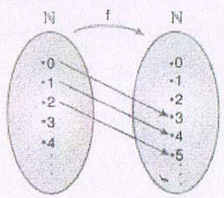
$f(x) = 2x$
$f(1) = 2$
$f(2) = 4$
$f(3) = 6$

B kümesinde 3 ve 5 açıkta kaldığından f fonksiyonu örten değildir.

Örnek 28

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

Çözüm



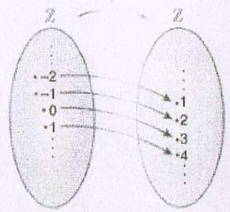
$f(x) = x + 3$
$f(0) = 3$
$f(1) = 4$
$f(2) = 5$

Değer kümesinde 0,1 ve 2 elemanları açıkta kaldığından f fonksiyonu örten değildir.

Örnek 29

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten midir?

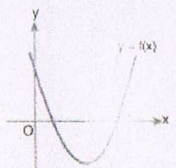
Çözüm



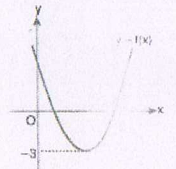
Değer kümesinde açıkta eleman kalmadığından f fonksiyonu örtendir.

Örnek 30

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu örten midir?

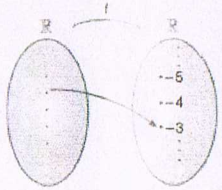


Çözüm



f(x) fonksiyonunun alabileceği en küçük değer −3 olsun. Bu durumda değer kümesinde bulunan

. . ., −6, −5, −4 gibi elemanlar açıkta kalır.



örten değildir.

Örnek 36

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = (a-2)x^2 + (b-3)x + a + b + 1$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, $f(2) + f(1)$ toplamı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Çözüm

Sabit fonksiyonda $f(x) = c = 0x^2 + 0x + c$ değişkenin yani x li terimlerin katsayıları 0 olmalıdır.

$f(x) = \underbrace{(a-2)}_{0}x^2 + \underbrace{(b-3)}_{0}x + a + b + 1$

$a = 2 \quad b = 3$

a ve b yerine yazılırsa

$f(x) = 6$

$f(2) + f(1) = 6 + 6 = 12$ bulunur.

Cevap : B

Örnek 37

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^{a-3} + (b-5)x + a \cdot b - 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, f(5) kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm

x değişkenlerini yok edelim.

$a - 3 = 0 \qquad b - 5 = 0$

$a = 3 \qquad b = 5$

a ve b yerlerine yazılırsa,

$f(x) = x^0 + 0 + 3 \cdot 5 - 4$

$f(x) = 12$

$f(5) = 12$

Ayrıca x^{a-3} ifadesini birinci dereceden yapıp daha sonra x değişkenini yok edelim.

$a - 3 = 1 \quad , \quad a = 4$

$f(x) = x^{a-3} + (b-5)x + a.b - 4$

$a = 4$ için

$f(x) = x + (b-5)x + 4b - 4$

$f(x) = (b-4)x + 4b - 4$

$b - 4 = 0 \; , \; b = 4$ olur.

$b = 4$ için $f(x) = 12 \; , \; f(5) = 12$

İki durumda da $f(5) = 12$ bulunur.

Cevap : D

Örnek 38

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = (a+3)x^3 + (b-8)x + 2a + b + c$ **fonksiyonu sıfır fonksiyonu olduğuna göre, c kaçtır?**

A) –2 B) 1 C) 3 D) 6 E) 8

Çözüm

$f(x) = 0$

$f(x) = \underbrace{(a+3)}_{0}x^3 + \underbrace{(b-8)}_{0}x + \underbrace{(2a+b+c)}_{0} = 0$

$a = -3 \quad , \quad b = 8 \quad , \quad -6 + 8 + c = 0$

$c = -2$ olur.

Cevap : A

Çözüm

$f(x) = x$

$f(x) = \underbrace{(a+2)}_{0}x^3 + \underbrace{(b-5)}_{1}x + \underbrace{(c-3)}_{0} = x$

$a + 2 = 0 \qquad b - 5 = 1 \qquad c - 3 = 0$

$a = -2 \qquad b = 6 \qquad c = 3$

$a + b + c = -2 + 6 + 3 = 7$ bulunur.

Cevap : C

Örnek 43

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$ birim fonksiyon olmak üzere,

$f(2x+5) = (a-3)x^2 + (b-2)x + c + 1$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

Çözüm

$f(x) = x$

$f(2x+5) = 2x + 5$

$f(2x+5) = \underbrace{(a-3)}_{0}x^2 + \underbrace{(b-2)}_{2}x + \underbrace{(c+1)}_{5} = 2x + 5$

$a - 3 = 0 \qquad b - 2 = 2 \qquad c + 1 = 5$

$a = 3 \qquad b = 4 \qquad c = 4$

$a + b + c = 3 + 4 + 4 = 11$ bulunur.

Cevap : E

41. f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (a-3)x^2 + (b-2)x + c - 5$

olduğuna göre, a + b + c toplamının değeri kaçtır?

42. f birim fonksiyon olmak üzere,

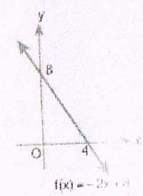
$f(3x+2) = (a-1)x^2 + (b-5)x + c - 2$

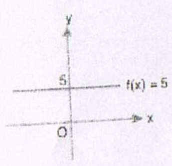
olduğuna göre, a + b + c toplamının değeri kaçtır?

6) Doğrusal Fonksiyon :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlardır. Doğrusal fonksiyonun grafiği analitik düzlemde bir doğrudur.

Örneğin,





Yukarıdaki grafikleri verilen $f(x) = -2x + 8$ ve $f(x) = 5$ fonksiyonları birer doğrusal fonksiyondur.

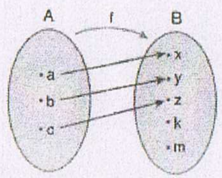
Örnek 34

A kümesinin eleman sayısı $2n + 1$, B kümesinin eleman sayısı $n + 10$ dur.

f : A → B ye birebir ve içine fonksiyon olduğuna göre, n sayısı en fazla kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm



Yukarıda birebir ve içine fonksiyon örneğinde değer kümesinin eleman sayısının tanım kümesinin eleman sayısından fazla olduğu görülmektedir.

Bu durumda,

$s(B) > s(A)$

$n+10 > 2n+1$

$9 > n$

↓

8

Cevap : B

35. **Aşağıdakilerden hangisi içine fonksiyondur?**

A) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 2$

B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$

C) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 1$

D) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

E) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$

36. $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, A dan B ye kaç farklı içine fonksiyon vardır?

4) Sabit Fonksiyon :

f : A → B ye tanımlı bir fonksi-yon ve c bir reel sayı olmak üzere, $\forall x \in A$ için

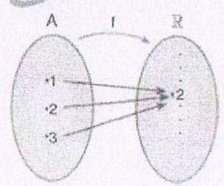
$f(x) = c$ oluyorsa, f sabit fonksiyondur. A kümesinin bütün elemanlarını B kümesinde yalnız bir elemanla eşleyen fonksiyonlara sabit fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımda c sayısını 0 aldığımızda oluşan fonksiyona sıfır fonksiyonu denir. Yani sıfır fonksiyonu sabit fonksiyonun özel halidir.

Örnek 35

$A = \{1, 2, 3\}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ fonksiyonu sabit fonksiyon mudur?

Çözüm



$f(x) = 2$

$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

$f(3) = 2$

A nın her elemanı değer kümesinde aynı elemanla eşleştiğinden, f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

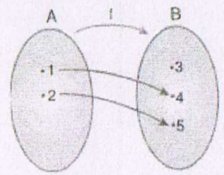
3) İçine Fonksiyon :

f : A → B fonksiyonu $f(A) \neq B$ ise yani görüntü kümesi ile değer kümesi eşit değilse, yani değer kümesinde açıkta eleman kalıyorsa, f fonksiyonu içine fonksiyondur. Örten olmayan fonksiyonlar olarak da düşünülebilir.

Örnek 31

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ $f : A \to B$ $f(x) = x + 3$ fonksiyonu içine fonksiyon mudur?

Çözüm



$f(x) = x + 3$

$f(1) = 4$

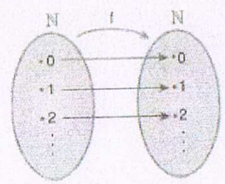
$f(2) = 5$

B kümesinde açıkta eleman kaldığından f fonksiyonu içine fonksiyondur.

Örnek 32

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$ fonksiyonu içine fonksiyon mudur?

Çözüm



Değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağından f fonksiyonu içine fonksiyon değildir. Örten fonksiyondur.

Örnek 33

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ olduğuna göre,

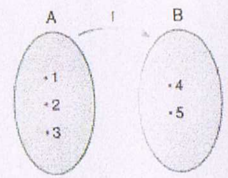
f : A → B ye

a) **Kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?**

b) **Kaç farklı içine fonksiyon tanımlanabilir?**

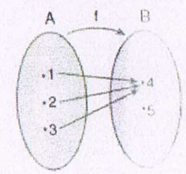
c) **Kaç farklı örten fonksiyon tanımlanabilir?**

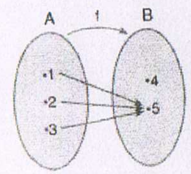
Çözüm



a) 1 in eşleşebileceği 2 eleman vardır.
2 nin eşleşebileceği 2 eleman vardır.
3 ün eşleşebileceği 2 eleman vardır.
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ bulunur.

b) İçine fonksiyon olabilmesi için, değer kümesinde 4 ve 5 elemanlarından birisi açıkta kalmalıdır. Bu durumda 1, 2 ve 3 elemanlarının tamamı ya 4 ile, ya da 5 ile eşleşmelidir.





2 tane içine fonksiyon vardır.

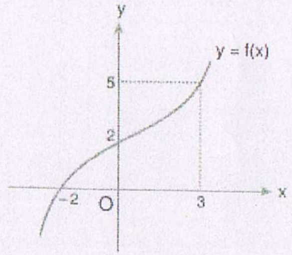
c) İçine olmayan fonksiyonlar örten olduğundan, tüm fonksiyonların sayısından içine fonksiyonların sayısını çıkaralım.

$8 - 2 = 6$ olur.

FONKSİYON GRAFİKLERİ

$f(x) = y$ nin grafiği (a, b) noktasından geçiyorsa,
$f(a) = b$ ve $f^{-1}(b) = a$ olur.

Örnek 50



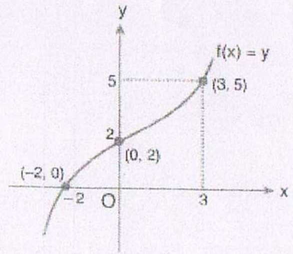
Yukarıdaki grafikte $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $f(0) + f(3) + f^{-1}(0)$ toplamı kaçtır?

A) –1 B) 3 C) 5 D) 8 E) 12

Çözüm

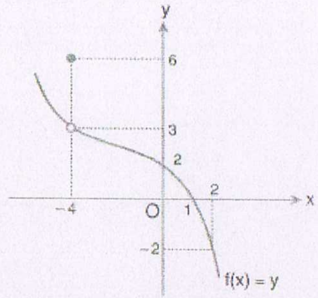
$f(x) = y$



$f(3) = 5$, $f^{-1}(5) = 3$
$f(0) = 2$, $f^{-1}(2) = 0$
$f(-2) = 0$, $f^{-1}(0) = -2$
$f(0) + f(3) + f^{-1}(0) = 2 + 5 - 2 = 5$ bulunur.

Cevap : C

Örnek 51

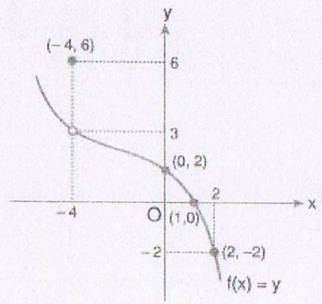


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $f(f(0)) + f(-4) + f^{-1}(0)$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 11

Çözüm



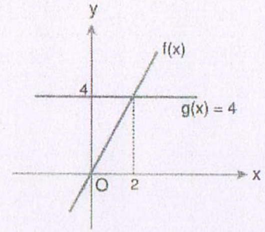
$f(-4) = 6,$ $f^{-1}(6) = -4$
$f(0) = 2,$ $f^{-1}(2) = 0$
$f(1) = 0,$ $f^{-1}(0) = 1$
$f(2) = -2,$ $f^{-1}(-2) = 2$

$\underbrace{\underbrace{f(f(0))}_{2}}_{-2} + \underbrace{f(-4)}_{6} + \underbrace{f^{-1}(0)}_{1}$

$-2 + 6 + 1 = 5$ bulunur.

Cevap : B

Örnek 54



$f(x)$ doğrusal, $g(x)$ sabit fonksiyon olduğuna göre,
$f(3) + g(5) + f^{-1}(10)$ toplamı kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 13 D) 15 E) 18

Çözüm

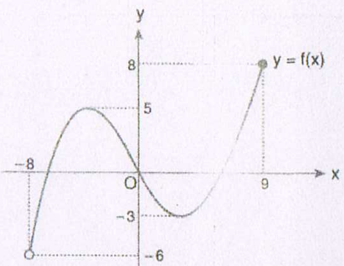
$f(x)$ doğrusu orijinden geçtiğine göre denklemi
$f(x) = y = ax$ şeklinde olur.
$(2, 4)$ noktasından geçtiği için,

$y = ax$
$\downarrow \quad \downarrow$
$4 \quad 2$
$4 = 2a$ $\quad f(x) = 2x$ olur.
$a = 2$

$g(x) = 4$ sabit fonksiyondur.
$f(3) = 6$
$g(5) = 4$
$f(5) = 10$ olduğundan $f^{-1}(10) = 5$ olur.
$f(3) + g(5) + f^{-1}(10) = 6 + 4 + 5 = 15$ bulunur.

Cevap : D

Örnek 55



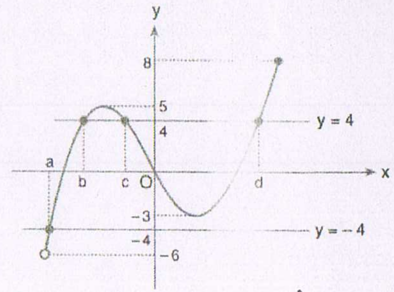
Yukarıda $f : (-8, 9] \rightarrow (-6, 8]$ tanımlı f fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre, $|f(x)| = 4$ olacak şekilde kaç farklı x değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

$|f(x)| = 4$ ise $f(x) = 4$ veya $f(x) = -4$ olur.



şekilde görüldüğü gibi,
$f(a) = -4$, $f(b) = f(c) = f(d) = 4$ yani,
$y = -4$ doğrusu $f(x)$ fonksiyonunu bir noktada,
$y = 4$ doğrusu $f(x)$ fonksiyonunu üç noktada kestiğinden $|f(x)| = 4$ olacak şekilde 4 farklı x değeri vardır.

Cevap : C

Önceki Sayfa
Sayfaya Dön
Sonraki Sayfa