Örnek

$P(x) = x^2 + 2x^3 - x + 5$

$Q(x) = x + x^2$

polinomları veriliyor.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \vdots & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen

$Q(x)$: Bölen

$B(x)$: Bölüm

$K(x)$: Kalan olmak üzere

Yukarıdaki bölme işleminde,

1. $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$
2. $der[K(x)] < der[Q(x)]$
3. $P(x) = Q(x).B(x) + K(x)$
4. $der[K(x)] < der[B(x)]$ ise, $Q(x)$ ile $B(x)$ yer değiştirirse kalan değişmez.
5. $K(x) = 0$ ise, $P(x)$ polinomu $Q(x)$ ve $B(x)$ polinomlarına tam bölünür ve $P(x) = Q(x).B(x)$ olur.

Çözüm

➢ Polinomlarda bölme işlemi yapılırken,

1. Bölünen ve bölen polinomlar değişkenin azalan kuvvetlerine göre yazılır.
2. Bölünenin en büyük dereceli terimi, bölenin en büyük dereceli terimine bölünür. Çıkan sonuç bölümün ilk terimi olarak yazılır.
3. Bulunan bu bölüm, bölenle çarpılarak aynı dereceli terimler alt alta gelecek şekilde bölünenin altına yazılır.
4. Bölünenin altına yazılan bu polinom, bölünenden çıkarılır.
5. Çıkan sonuçla yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük olana kadar işleme devam edilir.

Soruda verilen $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını x in azalan derecelerine göre sıralayalım.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - x + 5 & x^2 + x \\ \cline{2-2} \mp 2x^3 \mp 2x^2 & 2x - 1 \\ \hline -x^2 - x + 5 & \\ \pm x^2 \pm x & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \frac{2x^3}{x^2} = 2x \qquad \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Bölüm : $2x - 1$

Kalan : 5 bulunur.

1. $P(x) = 5x^2 - 7x - 4$ ve

$Q(x) = x - 2$

polinomları veriliyor.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 7x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ 5x^2 - 10x & 5x + 3 \rightarrow \text{Bölüm} \\ \hline 3x - 4 & \\ -\ 3x - 6 & \\ \hline 2 \rightarrow \text{Kalan} & \end{array}$$

2. $P(x) = 2x^2 - x + 3$ ve

$Q(x) = x + 1$

polinomları veriliyor.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} -\ 2x^2 + 2x & 2x - 3 \rightarrow \text{Bölüm} \\ \hline -3x + 3 & \\ -\ -3x - 3 & \\ \hline 6 \rightarrow \text{Kalan} & \end{array}$$

1. $5x + 3$, $K(x) = 2$ 2. $B(x) = 2x - 3$; $K(x) = 6$

Örnek

$P(x) = 2x - 1$ ve $Q(x) = x^2 + x$ olmak üzere,

$3.P(x).Q(x)$

çarpım polinomunu bulunuz.

Çözüm

➢ Sabit sayı ile polinom çarpılırken polinomun her bir terimi sabit sayı ile çarpılır.

➢ $(k.P)(x) = k.P(x)$, $k \in R$

➢ $P(x)$ polinomu ile $Q(x)$ polinomu çarpılırken, I. polinomun her bir terimi ile II. polinomun her bir terimi ayrı ayrı çarpılarak toplanır.

$(P.Q)(x) = P(x).Q(x)$

$3.P(x) = 3.(2x - 1) = 6x - 3$

$3.P(x).Q(x) = (6x - 3).(x^2 + x)$

$= 6x^3 + 6x^2 - 3x^2 - 3x$

$= 6x^3 + 3x^2 - 3x$ olur.

1. $P(x) = x^2 - 3x$ ve $Q(x) = 2x - 3$ olmak üzere, $2.P(x) - 3.Q(x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

$2P(x) - 3Q(x) = 2x^2 - 6x - 6x + 9$

$= 2x^2 - 12x + 9$

2. $P(x) = x^2 - x$ ve $Q(x) = x + 1$ olduğuna göre, $P(x).Q(x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

$P(x).Q(x) = (x^2 - x).(x + 1)$

$= x^3 + x^2 - x^2 - x$

$= x^3 - x$

3. $P(x) = x^2 - x + 1$ ve $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ olduğuna göre,

$P(x).Q(x)$

polinomunda x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

$P(x).Q(x) = (x^2 - x + 1).(x^2 + 3x - 1)$

$3x^3 - x^3 = 2x^3$ olduğundan katsayı 2 dir.

4. $P(x) = x^2 - 2x + 1$ olduğuna göre, $(x^2 - 1).P(x + 1)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

$P(x) = (x - 1)^2 \Rightarrow P(x + 1) = x^2$

$(x^2 - 1).P(x + 1) = (x^2 - 1).x^2$

$= x^4 - x^2$

Örnek 1

$P(x) = x^2 - 3x + 4$

olduğuna göre, $P(3)$ kaçtır?

Çözüm

Her polinom bir fonksiyondur. O halde, fonksiyonlarda yapılan tüm işlemler polinomlar için de geçerli olur.

➢ $P(x) = x^2 - 3x + 4$ eşitliğinde x yerine 3 yazılırsa $P(3)$ bulunur.

$P(3) = 3^2 - 3.3 + 4$

$P(3) = 9 - 9 + 4$

$P(3) = 4$ olur.

Örnek 2

$P(x) = x^2 - 3x + 4$

olduğuna göre, $P(x + 1)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm

➢ $P(x) = x^2 - 3x + 4$ eşitliğinde x yerine $x + 1$ yazılırsa $P(x + 1)$ bulunur.

$P(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$

$P(x + 1) = x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 4$

$P(x + 1) = x^2 - x + 2$ olur.

1. $P(x) = x^2 - ax + 2$ ve $P(1) = 4$

olduğuna göre, a kaçtır?

$P(1) = 1^2 - a.1 + 2 = 4$

$3 - a = 4$

$a = -1$

3. $P(x) = 3x + 4$

olduğuna göre, $P(x - 2)$ polinomunu bulunuz.

$P(x - 2) = 3(x - 2) + 4$

$= 3x - 2$

2. $P(x) = 2x^2 - mx + n$

polinomunda $P(-1) = 3$ ve $P(2) = 0$ olduğuna göre, m kaçtır?

$P(-1) = 2.(-1)^2 - m(-1) + n = 3$

$m + n = 1$

$P(2) = 2.2^2 - m.2 + n = 0$

$2m - n = 8$

$+ \quad m + n = 1$

$3m = 9 \Rightarrow m = 3$

4. $P(x) = x^2 - 2x + 1$

$Q(x) = ax^2 + bx + 4$

olmak üzere, $P(x - 1) = Q(x)$ olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

$x = 1$ için $P(0) = Q(1)$

$1 = a + b + 4$

$a + b = -3$

sonuç yayınları

Örnek

$P(x) = -2x^3 + x^2 + 3x - 1$

$Q(x) = x^3 - x + 4$

olduğuna göre, $P(x) + Q(x)$ toplam polinomu ve $P(x) - Q(x)$ fark polinomunu bulunuz.

➢ Polinomlarda toplama – çıkarma işlemi yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları kendi aralarında toplanır veya çıkarılır, sonra o terimin katsayısı olarak yazılır.

$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$ tir.

Çözüm

$P(x) = -2.x^3 + 1.x^2 + 3.x - 1$

$Q(x) = 1.x^3 + 0.x^2 - 1.x + 4$

$P(x) + Q(x) = -2x^3 + 1x^2 + 3x - 1 + 1x^3 + 0x^2 - 1x + 4$

$= (-2 + 1)x^3 + (1 + 0)x^2 + (3 - 1)x + (-1 + 4)$

$= -x^3 + x^2 + 2x + 3$ olur.

$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$

$P(x) - Q(x) = -2x^3 + 1x^2 + 3x - 1 - (1x^3 + 0x^2 - 1x + 4)$

$= -2x^3 + 1x^2 + 3x - 1 - 1x^3 - 0x^2 + 1x - 4$

$= (-2 - 1)x^3 + (1 - 0)x^2 + (3 + 1)x + (-1 - 4)$

$= -3x^3 + x^2 + 4x - 5$ olur.

1. $P(x) = x^2 - 1$

$Q(x) = -2x^2 + x - 1$

olduğuna göre, $P(x) + Q(x)$ toplam polinomunu bulunuz.

$P(x) + Q(x) = x^2 - 1 - 2x^2 + x - 1$

$= -x^2 + x - 2$

3. $P(x) = 3x^2 - 3x + 4$

$Q(x) = x^2 + x - 1$

olduğuna göre, $P(x) - Q(x)$ polinomunu bulunuz.

$P(x) - Q(x) = 3x^2 - 3x + 4 - x^2 - x + 1$

$= 2x^2 - 4x + 5$

2. $P(x) = x^3 - x + 1$

$Q(x) = x^2 + 3x - 4$

olduğuna göre, $(P + Q)(x)$ polinomunu bulunuz.

$P(x) + Q(x) = x^3 - x + 1 + x^2 + 3x - 4$

$= x^3 + x^2 + 2x - 3$

4. $P(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$Q(x) = x^3 + 4x + 1$

olduğuna göre, $(P - Q)(x)$ polinomunu bulunuz.

$P(x) - Q(x) = 2x^2 - 5x - 4 - x^3 - 4x - 1$

$= -x^3 + 2x^2 - 9x - 5$

sonuç yayınları

Örnek

$P(x) = (a-3)x^2 + bx + 2x - 3$

ifadesi sabit polinom ve

$Q(x) = (c-2)x + d$

ifadesi sıfır polinomu olduğuna göre,

$a + b + c + d$ kaçtır?

Çözüm

- $a_0 \in R$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere,

  $P(x) = a_0$ biçimindeki polinoma sabit polinom denir.
- $P(x) = 0$ biçimindeki polinoma sıfır polinomu denir.

$P(x) = (a-3)x^2 + bx + 2x - 3$

$P(x) = (a-3)x^2 + (b+2)x - 3$ ifadesi sabit polinom olduğundan,

$a - 3 = 0$ ve $b + 2 = 0$ olmalıdır.

Buna göre,

$a = 3$, $b = -2$ olur.

$Q(x) = (c-2)x + d$ ifadesi sıfır polinomu olduğundan,

$c - 2 = 0$ ve $d = 0$ olmalıdır.

Buna göre,

$c = 2$ ve $d = 0$ olur.

O halde, $a + b + c + d = 3 + (-2) + 2 + 0 = 3$ olur.

1. $P(x) = (m-1)x^2 + (n-2)x$

ifadesi sıfır polinomu olduğuna göre, $m + n$ kaçtır?

$P(x) = \underbrace{(m-1)}_{0}x^2 + \underbrace{(n-2)}_{0}x$

$\left.\begin{aligned} m-1=0 &\Rightarrow m=1 \\ n-2=0 &\Rightarrow n=2 \end{aligned}\right\} m+n=3$

2. $P(x) = (a+2)x^2 - (b-1)x + 3$

ifadesi sabit polinom olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

$P(x) = \underbrace{(a+2)}_{0}x^2 - \underbrace{(b-1)}_{0}x + 3$

$\left.\begin{aligned} a+2=0 &\Rightarrow a=-2 \\ b-1=0 &\Rightarrow b=1 \end{aligned}\right\} a+b=-1$

3. $P(x) = (a-b-3)x^2 + (2a+b-6)x + 1$

ifadesi sabit polinom olduğuna göre, $a.b$ kaçtır?

$P(x) = \underbrace{(a-b-3)}_{0}x^2 + \underbrace{(2a+b-6)}_{0}x + 1$

$$\begin{array}{r} a-b=3 \\ +\quad 2a+b=6 \\ \hline 3a=9 \end{array}$$

$\left.\begin{aligned} a&=3 \\ b&=0 \end{aligned}\right\} a.b=0$

4. $Q(x) = (a-1)x^2 - bx^2 + 3x + bx + a + b$

ifadesi sabit polinom olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

$Q(x) = \underbrace{(a-1-b)}_{0}x^2 + \underbrace{(3+b)}_{0}x + a + b$

$b = -3$

$a - 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = -2$

$\Rightarrow a + b = -5$

Örnek

I. $P(x) = x^2 - 3x + 4$

II. $Q(x) = \sqrt{3} - 1$

III. $R(x) = \frac{1}{3}x^2 + x^{-2} + 3$

IV. $K(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$

V. $M(x) = 6x^3 - \sqrt{3}x^2$

Yukarıdaki verilenlerden hangisi ya da hangileri polinomdur?

- x değişken, $n \in N$ ve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ olmak üzere,

  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$

  ifadesine gerçek katsayılı ve tek değişkenli polinom (çok terimli) denir.

Çözüm

I. $P(x) = x^2 - 3x + 4$

Bu ifadede x in kuvvetleri $2 \in N$ ve $1 \in N$ olduğundan $P(x)$ polinomdur.

II. $Q(x) = \sqrt{3} - 1$

Bu ifadede x in kuvveti $0 \in N$ olduğundan $Q(x)$ polinomdur.

III. $R(x) = \frac{1}{3}x^2 + x^{-2} + 3$

Bu ifadede x in kuvveti $-2 \notin N$ olduğundan $R(x)$ polinom değildir.

IV. $K(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$

Bu ifadede $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ olup x in kuvveti $\frac{1}{2} \notin N$ olduğundan $K(x)$ polinom değildir.

V. $M(x) = 6x^3 - \sqrt{3}x^2$

Bu ifadede x in kuvvetleri $3 \in N$ ve $2 \in N$ olduğundan $M(x)$ polinomdur.

Buna göre, I, II ve V polinomdur.

Aşağıda verilen ifadelerden hangisi ya da hangileri polinomdur?

a. $P(x) = x^6 - 2$

$P(x) = x^6 - 2.x^0 \Rightarrow 0$ ve 6 doğal sayı olduğundan polinomdur.

b. $Q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$

$Q(x) = x^{-2} - 2.x^0$

$-2 \notin N \Rightarrow Q(x)$ polinom değildir.

c. $R(x) = 2\sqrt{x} - 1$

$R(x) = 2.x^{\frac{1}{2}} - x^0$

$\frac{1}{2} \notin N \Rightarrow R(x)$ polinom değildir.

d. $K(x) = 2\sqrt{3}x - 1$

$K(x) = 2.\sqrt{3}.x^1 - x^0 \Rightarrow 0$ ve 1 doğal sayı olduğunda $K(x)$ polinomdur.

Örnek

$P(x) = x^4 + 2$

$Q(x) = x^2 - 2x - 1$

polinomları veriliyor.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2 & x^2 - 2x - 1 \\ \mp x^4 \pm 2x^3 \pm x^2 & x^2 + 2x + 5 \\ \hline 2x^3 + x^2 + 2 & \\ \mp 2x^3 \pm 4x^2 \pm 2x & \\ \hline 5x^2 + 2x + 2 & \\ \mp 5x^2 \pm 10x \pm 5 & \\ \hline 12x + 7 & \end{array} \qquad \frac{x^4}{x^2} = x^2, \quad \frac{2x^3}{x^2} = 2x, \quad \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

Buna göre, Bölüm : $B(x) = x^2 + 2x + 5$

Kalan : $K(x) = 12x + 7$

Yukarıdaki bölme işleminde;

$$\underbrace{x^4 + 2}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{\text{Bölen}} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x + 5)}_{\text{Bölüm}} + \underbrace{12x + 7}_{\text{Kalan}}$$

Bölüm polinomu: $x^2 + 2x + 5$

Kalan polinomu: $12x + 7$ olur.

1. $P(x) = x^3 + 7x - 3$

$Q(x) = x^2 + x - 1$

polinomları veriliyor.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x - 3 & x^2 + x - 1 \\ - \; x^3 + x^2 - x & x - 1 \rightarrow \text{Bölüm} \\ \hline -x^2 + 8x - 3 & \\ - \; -x^2 - x + 1 & \\ \hline 9x - 4 \rightarrow \text{Kalan} & \end{array}$$

2. $P(x)$ polinomunun $x + 3$ ile bölümünden elde edilen bölüm $x^2 + 2$, kalan ise 3 tür.

Buna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

$P(x) = (x + 3).(x^2 + 2) + 3$

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 9$

3. $\dfrac{a^6 + 2a^2 + 12}{a^2 + 2}$

ifadesinin en sade halini bulunuz.

$$\begin{array}{l|l} a^6 + 2a^2 + 12 & a^2 + 2 \\ - \; a^6 + 2a^4 & a^4 - 2a^2 + 6 \\ \hline -2a^4 + 2a^2 + 12 & \\ - \; -2a^4 - 4a^2 & \\ \hline 6a^2 + 12 & \\ - \; 6a^2 + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\dfrac{a^6 + 2a^2 + 12}{a^2 + 2} = a^4 - 2a^2 + 6$

sonuç yayınları

Örnek

$P(x) = -3x^4 + x^2 - 4$

polinomunun terimlerini, katsayılarını, derecesini, başkatsayısını ve sabit terimini bulunuz.

Çözüm

Terimleri	: $-3x^4, x^2, -4$
Katsayıları	: $-3, 1, -4$
Derecesi	: $der[P(x)] = 4$
Başkatsayısı	: -3
Sabit terimi	: -4 tür.

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x^0$
- $a_n x^n, \; a_{n-1} x^{n-1}, \; \dots, \; a_2 x^2, \; a_1 x^1$ ve $a_0 x^0$ **ifadelerine polinomun terimleri denir.**
- $a_n, \; a_{n-1}, \; \dots, \; a_2, \; a_1$ ve a_0 **ifadelerine polinomun katsayıları denir.**
- $a_n x^n$ **terimindeki a_n sayısına terimin katsayısı, x in kuvveti olan n sayısına terimin derecesi denir.**
- **Derecesi en büyük olan terimin derecesine polinomun derecesi denir ve $der[P(x)]$ şeklinde gösterilir.**
- a_0 **polinomun sabit terimidir.**
- **Derecesi en büyük olan terimin katsayısına polinomun başkatsayısı denir.**

1. $P(x) = 6x^3 - 2x^4 + x - 1$

polinomunun derecesi kaçtır?

Derecesi en büyük olan terim x^4 olduğundan $der(P(x)) = 4$ tür.

2. $P(x) = x^2 - 4x + 5$

polinomunun sabit terimi ile baş katsayısının toplamı kaçtır?

Sabit terim $= 5$, Başkatsayı $= 1$ } $5 + 1 = 6$ dır.

3. $P(x) = 5x^3 - x^2 + 3x - 1$

polinomunun başkatsayısı a, derecesi b ve sabit terimi c olmak üzere, $a + b + c$ toplamı kaçtır?

Başkatsayısı $a = 5$

Derecesi $b = 3$

Sabit terim $c = -1$

$\rightarrow a + b + c = 7$ dır.

4. $P(x) = x^5 - 2x^3 + 7x - 5$

polinomunun terim sayısı ile katsayılarının toplamı kaçtır?

$P(x)$, 4 terimden oluşmuştur.

Katsayıları $1, -2, 7, -5$ tir.

Toplam $4 + 1 - 2 + 7 - 5 = 5$ bulunur.

sonuç yayınları